数理解析研究所講究録
656巻 1988年 51-66

圧縮性Navier-Stokes方程式のある球対称な時間的大局解

神戸商科大学　板谷信敏
(Nobutoshi Itaya)

1。圧縮性Navier-Stokes方程式(以下CNS方程式と書く)に関しても近年多くの研究成果が得られているが，残念ながら未だ一般的な解決には到っていない。このCNS方程式の取り扱い方の難しさを表わす一例，しかもできるだけ空間3次元的な特徴を持つものを以下に示したい。何んらかの参考になれば幸いである。

先ずCNS方程式の一番簡単な形を書く。

$$
(1)\quad \begin{cases} \rho(x,t)\{v_t(x,t)+(v\cdot\nabla)v\} = \mu(\Delta+\frac{1}{3}\nabla\cdot \mathrm{div})v \\ \qquad\qquad - R\nabla(\rho\theta), \\ C_v\rho\{\theta_t(x,t)+(v\cdot\nabla)\theta\} = \varkappa\Delta\theta - R\rho\theta\,\mathrm{div}\,v + \Psi[\nabla v], \\ \rho_t + \mathrm{div}\,\rho v = 0, \quad (x\in\mathbb{R}^3, \quad t\geqq 0), \end{cases}
$$

[v，速度ベクトル；θ，絶対温度；ρ，密度；$\Psi=-\frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\,v)^2+\frac{\mu}{2}e_{ij}e_{ij}$ ($\geqq 0$)(散逸関数，$e_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_i}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_i$)；$\mu$は粘性係数，$\varkappa$は熱伝導率，$C_v$

は定積比熱であり，これらは全て正の定数；R，気体定数〕。

ここで(1)は x 座標系（直交座標系）の取り方は任意であることに注意する。今 $(v, \theta, \rho) \in \mathfrak{H}^{\alpha}(R^3_T) = H^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{(R^3_T)} \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{(R^3_T)} \times B^{1+\alpha,1+\alpha/2}_{(R^3_T)}$ $(0 < T < \infty,\ \alpha \in (0,1);\ R^3_T \equiv R^3 \times [0, T])$（記法は[2]～[5]に準ずる）が(1)をみたし，かつ

$$
(2)\quad
\begin{cases}
v(x,t) = \begin{cases} \hat{v}(|x|, t)\dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0), \\ 0 \quad (x = 0) & (|x| = (x_i^2)^{\frac{1}{2}}), \end{cases} \\
\theta(x,t) = \tilde{\theta}(|x|, t), \\
\rho(x,t) = \tilde{\rho}(|x|, t)
\end{cases}
$$

なる形をしていたとすると，このとき $\hat{v}$，$\tilde{\theta}$，$\tilde{\rho}$ は次をみたす。

$$
(3)\quad
\begin{cases}
\tilde{\rho}(r,t)\left\{\hat{v}_t(r,t) + \hat{v}\hat{v}_r\right\} = \dfrac{4}{3}\mu\left(\hat{v}_{rr} + \dfrac{2}{r}\hat{v}_r - \dfrac{2}{r^2}\hat{v}\right) \\
\qquad\qquad - R(\tilde{\rho}\tilde{\theta})_r, \\
C_v\tilde{\rho}(\tilde{\theta}_t + \hat{v}\tilde{\theta}_r) = \kappa\left(\tilde{\theta}_{rr} + \dfrac{2}{r}\tilde{\theta}_r\right) - R\tilde{\rho}\tilde{\theta}\left(\hat{v}_r + \dfrac{2}{r}\hat{v}\right) \\
\qquad\qquad + \dfrac{4}{3}\mu\left(\hat{v}_r - \dfrac{\hat{v}}{r}\right)^2, \\
\tilde{\rho}_t + (\tilde{\rho}\hat{v})_r + \dfrac{2}{r}\tilde{\rho}\hat{v} = 0,
\end{cases}
$$

（$r \geqq 0$（$r = 0$ は $r \to 0$ の意味において），$0 \leqq t \leqq T$）．

所で(1)に対して初期条件として次を課す（$R_+ \equiv [0, \infty)$）。

$$
\begin{cases}
v(x, 0) = v_0(x) = \hat{v}_0(|x|)\dfrac{x}{|x|} \ (x \neq 0) \quad (v_0 \in H^{2+\alpha}_{(R_+)}, \\
\qquad \hat{v}_0(0) = \hat{v}_0''(0) = 0),
\end{cases}
$$

$$
(4)\quad \begin{cases} \theta(x,0) = \theta_0(x) = \tilde{\theta}_0(|x|) \; (\tilde{\theta}_0 \in H^{2+\alpha}(R_+),\ \tilde{\theta}'(0)=0), \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) = \tilde{\rho}_0(|x|) \; (\tilde{\rho}_0 \in H^{1+\alpha}(R_+),\ \tilde{\rho}_0'(0)=0, \\ \qquad \rho_0 \geqq \bar{\rho}_0 > 0 \; (\bar{\rho}_0 \text{ は定数}))。 \end{cases}
$$

ここで証明なしに次の定理を述べる。

定理1。ある $T \in (0, \infty)$ に対して $\mathfrak{H}^\alpha(R^3_T)$ に属し (1)-(4) をみたす (v, θ, ρ) が唯一つ存在する。しかも ρ, $\theta > 0$ である。

また次の補題を用意する。

補題1。今 $(v, \theta, \rho) \in \mathfrak{H}^\alpha(R^3_T)$ $(0 < T < \infty)$ が (1)-(4)をみたすならば v, θ, ρ はそれぞれ

$$
(5)\quad \begin{cases} v(x,t) = \tilde{v}(|x|)\dfrac{x}{|x|} \; (x \neq 0), \quad \theta(x,t) = \hat{\theta}(|x|, t), \\ \rho(x,t) = \hat{\rho}(|x|, t) \end{cases}
$$

なる形をもつ。

証明。(概略)。x 座標系と原点を共有する任意の直交座標系—x^*座標系を考える。成分的には $x = U x^*$ (U, 直交行列) なる関係がある。今,

$$
(6)\quad \begin{cases} v^*(x^*, t) \equiv U^{-1} v(Ux^*, t), \\ \theta^*(x^*, t) \equiv \theta(Ux^*, t), \quad \rho^*(x^*, t) = \rho(Ux^*, t) \end{cases}
$$

と定義すると $(v^*, \theta^*, \rho^*) \in \mathfrak{H}^\alpha(R^3_T)$ (x^* と t の関数として) である。しかも容易に知られるように (1) で x の代りに x^* としたものをみたし，初期条件は

$$(7)\quad \begin{cases} v^*(x^*, 0) = \begin{cases} \tilde{v}_0(|x^*|)\dfrac{x^*}{|x^*|} & (x^* \neq 0) \\ 0 & (x^* = 0) \end{cases}, \\ \theta^*(x^*, 0) = \theta_0(|x^*|), \\ \rho^*(x^*, 0) = \rho_0(|x^*|) \end{cases}$$

となる。次に x^* と t の関数の組

$$(8)\quad \begin{cases} (v(x^*, t),\ \theta(x^*, t),\ \rho(x^*, t)) \\ (v(x^*, t) \equiv (v_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t))_{i=1,2,3}\ (x^* = (x_i^*)_{i=1,2,3}), \\ \text{など}) \end{cases}$$

を考えて見る。これは x と t の関数の組 (v, θ, ρ) に、U に相当する回転をさせたものを x^* と t の関数の組として考えたものである。故に $v(x^*, t)$, $\theta(x^*, t)$, $\rho(x^*, t)$ は (1) で x の代りに x^* としたものをみたす。しかも初期条件は (7) と同じである。故に解の一意性から

$$(9)\quad v^*(x^*, t) = v(x^*, t),\quad \theta^*(x^*, t) = \theta(x^*, t),\quad \rho^*(x^*, t) = \rho(x^*, t)$$

となり、また回転の任意性を考慮すると結局 (5) が得られる。

（証明了。）

2. 以下では方程式 (1) を（l_1, l_2 ($> l_1$) は正定数）

$$(10)\quad t \geqq 0,\quad x \in \{x \in R^3 : 0 < l_1 \leqq |x| \leqq l_2 < \infty\} = \bar{D}$$

で考えることにする。（$l_1 = 0$ にしたいのだが今の所見通しが付いていない。）尚、初期値・境界値は次のように与えられる。

$$(11)\quad \begin{cases} v(x,0) = v_0(|x|)\dfrac{x}{|x|} \;\; (v_0 \in H^{2+\alpha}_{(I)} \;(I = [l_1, l_2], \\ \qquad\qquad \alpha \in (0,1)),\; v_0(l_1) = v_0(l_2) = 0), \\ \theta(x,0) = \theta_0(|x|) \;(\theta_0 \in H^{2+\alpha}_{(I)},\; \theta_0'(l_1) = \theta_0'(l_2) = 0, \\ \qquad\qquad 0 < \overline{\theta}_0 \leqq \theta_0 \;(\overline{\theta}_0,\text{定数})), \\ \rho(x,0) = \rho_0(|x|) \;(\rho_0 \in H^{1+\alpha}_{(I)},\; \rho_0 \geqq \overline{\rho}_0 > 0 \;(\overline{\rho}_0, \\ \qquad\qquad \text{定数})), \end{cases}$$

$$(11)' \quad \begin{cases} v(x,t) = 0,\;\; \theta_\nu(x,t) = 0 \;(t \geqq 0;\; |x| = l_1, \\ \qquad l_2)\;(\theta_\nu\text{は}\overline{D}\text{の境界における内部法線方向微分}) \\ [\text{これに相補条件を加える（省略）}]。 \end{cases}$$

前節の議論と同じようにして次の定理と補題が成立する。

定理 1′。[定理 1 で 'R^3_T'，'(1)-(4)' の代りにそれぞれ '$\overline{D}_T$'，'(1)-(11)-(11)′' としたもの（ただし $\overline{D}_T \equiv \overline{D} \times [0, T]$，また (1) では x について R^3 の代りに $\overline{D}$ で考えるが今後は特に言及しない）。]

補題 1′。[補題 1 で 'R^3_T'，'(1)-(4)' の代りにそれぞれ '$\overline{D}_T$'，'(1)-(11)-(11)′' としたもの。]

さて，定理 1′ と補題 1′ を基礎にして方程式 (3) を利用しつつ (1)-(11)-(11)′ の解 $(v, \theta; \rho)$ に関するアプリオリ評価を求めることを試みる。今，$(v, \theta, \rho) \in \mathfrak{H}^\alpha(\overline{D}_T)$ が (1)-(11)-(11)′ の解とする。このとき補題 1′ によって $(\tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{\rho})$ は $\mathfrak{H}^\alpha(I_T)$ に属し（$I \equiv [l_1, l_2]$，$I_T \equiv I \times [0, T]$），かつ以

下の初期・境界条件をみたす (3) の解である。

$$(12)\quad \begin{cases} \hat{v}(r,0)=v_0(r)\in H^{2+\alpha}_{(I)},\quad \tilde{\theta}(r,0)=\theta_0(r)\in H^{2+\alpha}_{(I)}\ (\theta_0\geqq\bar{\theta}_0 \\ >0),\quad \tilde{\rho}(r,0)=\rho_0(r)\in H^{1+\alpha}_{(I)}\ (\rho_0\geqq\bar{\rho}_0>0)\ ; \\ \tilde{v}(l_1,t)=\hat{v}(l_2,t)=\tilde{\theta}_r(l_1,t)=\tilde{\theta}_r(l_2,t)=0\ (0\leqq t \\ \leqq T)\ [\text{これに相補条件を加える（略）}]\ ; \end{cases}$$

今，(3) の第3式に対応する特性方程式

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\bar{r}(t;r_0)=\hat{v}(\bar{r}(t;r_0),t)\ ,\ \bar{r}(0;r_0)=r_0\quad (0\leqq t\leqq T), \\ (r_0\in I=[l_1,l_2],\ \hat{v}\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{(I_T)},\quad \tilde{v}(l_1,t)=\hat{v}(l_2,t)=0) \end{cases}$$

を考える。解曲線 $\bar{r}(t;r_0)$ の性質により (3)の第3式から

$$(14)\quad \frac{d}{dt}\tilde{\rho}(\bar{r}(t),t)=-\tilde{\rho}\tilde{v}_r-\frac{2}{r}\tilde{\rho}\tilde{v}$$

を得る。これより直ちに次の等式が導かれる。

$$(15)\quad \begin{cases} \tilde{\rho}(\bar{r}(t;r_0),t) \\ =\rho_0(r_0)\left(\dfrac{r_0}{\bar{r}(t;r_0)}\right)^2\exp\left[-\displaystyle\int_0^t \tilde{v}_r(\bar{r}(\tau;r_0),\tau)\,d\tau\right]. \end{cases}$$

ここで $\hat{v}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\rho}$ を

$$(16)\quad \begin{cases} \hat{v}(r_0,t_0)\equiv\tilde{v}(\bar{r}(t;r_0),t)\big|_{t=t_0}, \\ \hat{\theta}(r_0,t_0)\equiv\tilde{\theta}(\bar{r}(t;r_0),t)\big|_{t=t_0},\ (0\leqq t_0\leqq T) \\ \hat{\rho}(r_0,t_0)\equiv\tilde{\rho}(\bar{r}(t;r_0),t)\big|_{t=t_0} \end{cases}$$

で定義する。これより (13) から $r(r_0,t_0)\equiv\bar{r}(t_0;r_0)$ として

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_0}r(r_0,t_0)=\hat{v}(r_0,t_0)\ ,\ r(r_0,0)=r_0\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(r_0, t_0) = r_0 + \int_0^{t_0} \hat{v}(r_0, \tau)\, d\tau , \\ r_{r_0}(r_0, t_0) = 1 + \int_0^{t_0} \hat{v}_{r_0}(r_0, \tau)\, d\tau \equiv 1 + \Omega(r_0, t_0) \end{cases}$$

を得る。また (14) より等式

(18)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_0} \log \hat{\rho}(r_0, t_0) = - \dfrac{\partial r_0}{\partial r}(r,t)\, \hat{v}_{r_0}(r_0, t_0) - \dfrac{2}{r} r_{t_0} \\ = - \dfrac{\hat{v}_{r_0}}{r_{r_0}} - (2 \log r)_{t_0} = \dfrac{-\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega(r_0, t_0)} - (\log r^2)_{t_0} \end{cases}$$

を経て

(19)
$$\begin{cases} \hat{\rho}(r_0, t_0) = \rho_0(r_0) \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2 \dfrac{1}{1+\Omega(r_0, t_0)} \\ \left(\dfrac{1}{1+\Omega} = \exp\left[-\int_0^{t_0} \tilde{v}_r(r(r_0, \tau), \tau)\, d\tau \right] > 0 \text{ に注意} \right) \end{cases}$$

を得る。さらに (3) の第 1 式中の $\tilde{v}_{rr} + \frac{2}{r}\tilde{v}_r - \frac{2}{r^2}\tilde{v} = (\tilde{v}_r + \frac{2}{r}\tilde{v})_r$ について以下の関係式が導かれる。

(20)
$$\left[\tilde{v}_{rr} + \frac{2}{r}\tilde{v}_r - \frac{2}{r^2}\hat{v}\right]_{\begin{cases} r = r(r_0, t_0), \\ t = t_0 \end{cases}} = \left(\tilde{v}_r + \frac{2}{r}\tilde{v}\right)_r \Big|_{\begin{cases} r = r(r_0, t_0), \\ t = t_0 \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{1+\Omega(r_0, t_0)} \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} + \frac{2\hat{v}}{r} \right)_{r_0} = \frac{1}{1+\Omega} \left\{ \left(\log (1+\Omega) r^2 \right)_{t_0} \right\}_{r_0}$$

$$= - \frac{1}{1+\Omega} \left(\log \hat{\rho} \right)_{t_0 r_0}$$

かくして (3) の第 1 式より結局

(21) $$\rho_0(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \hat{v}_{t_0}(r_0, t_0) = - \frac{4}{3}\mu \left(\log \hat{\rho} \right)_{t_0 r_0} - R(\hat{\rho}\hat{\theta})_{r_0}$$

が得られる。ここで

(22) $$\rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \hat{v}_{t_0} = \rho_0 \left\{ \left(\hat{v} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)_{t_0} - 2\hat{v}^2 \frac{r_0}{r^3} \right\}$$

に注意して(21)の両辺をr_0について任意の $a \in I = [l_1, l_2]$ からr_0まで積分する。適当に整理して次の結果を得る。

(23) $$\frac{d}{dt_0}\Big[-\int_a^{r_0}\rho_0\Big\{\hat{v}\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2 - v_0\Big\}dr_0 + \int_0^{t_0}dt_0'\int_a^{r_0}2\rho_0\hat{v}^2\frac{r_0}{r^3}dr_0 + \frac{4}{3}\mu\times\log\frac{\hat{\rho}(a,t_0)}{\rho_0(a)} + \int_0^{t_0}(R\hat{\rho}\hat{\theta})(a,t_0')\,dt_0'\Big]_A$$

$$= \frac{d}{dt_0}\Big\{\frac{4}{3}\mu\, y(r_0,t_0;a)\Big\} = \frac{4}{3}\mu(\log\rho)_{t_0} + R\hat{\rho}\hat{\theta},$$

$$\Big(y(r_0,t_0;a) \equiv [\cdots]_A\times\frac{3}{4\mu},\ y(r_0,0;a)=0 \Big)。$$

これより(18)を参考にして($r_{t_0}=\hat{v}$)

(24) $$y_{t_0} = -\frac{2}{r}\hat{v} - \frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} + k\hat{\rho}\hat{\theta} \quad \Big(k=\frac{3}{4\mu}R\Big),$$

が成立する。$\hat{v}_{r_0}=(1+\Omega)_{t_0}$ に注意すれば上より関係式

(25) $$(1+\Omega)_{t_0} + \Big(\frac{2}{r}\hat{v} + y_{t_0}\Big)(1+\Omega) = k\rho_0\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2\hat{\theta}$$

を得る。これを $1+\Omega$ について解くと

(26) $$\begin{cases} 1+\Omega(r_0,t_0) = \Big(\dfrac{r_0}{r}\Big)^2 e^{-y(r_0,t_0;a)}\Big[1+\displaystyle\int_0^{t_0}k\rho_0 e^{y(r_0,\tau)}\times \\ \qquad\times\hat{\theta}(r_0,\tau)\,d\tau\Big]_B \end{cases}$$

となる。故に$\hat{\rho}$は次のように表される。

(27) $$\hat{\rho} = \rho_0\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^2\frac{1}{1+\Omega} = \rho_0 e^{y}[\cdots]_B^{-1}。$$

尚、(26)より得られる

(28) $$r^2(1+\Omega)e^{+y(r_0,t_0;a)} = r^2 r_{r_0} e^{y(r_0,t_0;a)}$$

$$= \Big[1+k\int_0^{t_0}\rho_0(r_0)e^{y(r_0,\tau;a)}\hat{\theta}(r_0,\tau)\,d\tau\Big]r_0^2$$

なる関係式には注意するべきである。

3。（アプリオリ評価の続き。） 所で容易に知られるように前節の（$\hat{v}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\rho}$）はr_0とt_0の関数として$H^{\alpha}(I_T)$に属し，しかも次式をみたす。

$$
(29)\quad
\begin{cases}
\rho_0(r_0)\,\hat{v}_{t_0}(r_0,t_0)\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2 = \dfrac{4}{3}\mu\left(\dfrac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega}+\dfrac{2}{r}\hat{v}\right)_{r_0} - R\,(\hat{\rho}\,\hat{\theta})_{r_0}, \\[2mm]
C_v\,\rho_0\,\hat{\theta}_{t_0}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2 = \kappa\left\{\left(\dfrac{\hat{\theta}_{r_0}}{1+\Omega}\right)_{r_0} + \dfrac{2}{r}\hat{\theta}_{r_0}\right\} - R\,\hat{\rho}\,\hat{\theta}\,\dfrac{1}{r^2}(r^2\hat{v})_{r_0} \\
\qquad\qquad + \dfrac{4}{3}\mu(1+\Omega)\left(\dfrac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega}-\dfrac{\hat{v}}{r}\right)^2, \\[2mm]
\hat{\rho}(r_0,t_0) = \rho_0(r_0)\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2\dfrac{1}{1+\Omega}, \\[2mm]
(0\leqq t_0\leqq T,\ l_1\leqq r_0\leqq l_2)\text{。}
\end{cases}
$$

また初期・境界条件は次のようになる。

$$
(29)'\quad
\begin{cases}
\hat{v}(r_0,0) = v_0(r_0)\in H^{2+\alpha}_{(I)}, \\
\hat{\theta}(r_0,0) = \theta_0(r_0)\in H^{2+\alpha}_{(I)}\ (\theta_0\geqq\bar{\theta}_0>0), \\
\rho_0\in H^{1+\alpha}_{(I)}\quad(\rho_0\geqq\bar{\rho}_0>0)\ ; \\
\hat{v}(l_1,t)=\hat{v}(l_2,t)=\hat{\theta}_{r_0}(l_1,t)=\hat{\theta}_{r_0}(l_2,t)\quad(0\leqq t_0\leqq T), \\
\text{［これに相補条件を加える（略）］。}
\end{cases}
$$

先ず（29）の第1式の両辺に$\hat{v}r^2$，その第2式の両辺にr^2を乗じてそれぞれ$I=[l_1,l_2]$でr_0について積分する。その結果次を得る。

$$
(30)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt_0}\displaystyle\int_I\dfrac{\rho_0}{2}\hat{v}^2 r_0^2\,dr_0 = -\dfrac{4}{3}\mu\int_I\left(\dfrac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega}+\dfrac{2}{r}v\right)(\hat{v}r^2)_{r_0}\,dr_0 \\
\qquad\qquad + R\displaystyle\int_I\hat{\rho}\,\hat{\theta}\,(\hat{v}r^2)_{r_0}\,dr_0,
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt_0}\int_I C_v\rho_0\hat{\theta}r_0^2\,dr_0 &= -R\int_I\hat{\rho}\hat{\theta}(\hat{v}r^2)_{r_0}\,dr_0\\ &\quad+\frac{4}{3}\mu\int_I(1+\Omega)\left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega}-\frac{\hat{v}}{r}\right)^2 r^2\,dr_0 \text{。}\end{aligned}\right.$$

次に$(C_v\rho_0\log\hat{\theta})_{t_0}$ にr_0^2をかけて I で r_0 について積分する。

(31) $$\frac{d}{dt_0}\int_I C_v\rho_0(\log\hat{\theta})r_0^2\,dr_0=\int_I C_v\rho_0\frac{\hat{\theta}_{t_0}}{\hat{\theta}}r_0^2\,dr_0$$

$$=\int_I\left[\frac{\kappa}{\hat{\theta}}\left\{\left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{1+\Omega}\right)_{r_0}+\frac{2}{r}\hat{\theta}_{r_0}\right\}r^2-R\hat{\rho}(r^2\hat{v})_{r_0}+\frac{1+\Omega}{\hat{\theta}}r^2\hat{\Psi}\right]dr_0$$

$$\left(\hat{\Psi}\equiv\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega}-\frac{\hat{v}}{r}\right)^2\right)$$

$$=\kappa\int_I\frac{\hat{\theta}_{r_0}^2}{\hat{\theta}^2}\cdot\frac{r^2}{1+\Omega}\,dr_0-R\int_I\hat{\rho}(r^2v)_{r_0}\,dr_0+\int_I\frac{1+\Omega}{\hat{\theta}}r^2\hat{\Psi}\,dr_0 .$$

同様にして次が得られる。

(32) $$\frac{d}{dt_0}\int_I(1+\Omega)\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 r_0^2\,dr_0=\frac{d}{dt_0}\int_I\left(\frac{r^3}{3}\right)_{r_0}dr_0=\frac{d}{dt_0}\left(\frac{l_2^3-l_1^3}{3}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt_0}\int_I\rho_0\log\left\{(1+\Omega)\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}r_0^2\,dr_0=\int_I\rho_0\left\{\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega}+\frac{2\hat{v}}{r}\right\}r_0^2\,dr_0$$

$$=\int_I\hat{\rho}(r^2v)_{r_0}\,dr_0 \text{。}$$

今，$S(t_0)$ $(0\leqq t_0\leqq T)$ を

(33) $$S(t_0)\equiv\int_I\rho_0\frac{\hat{v}^2}{2}r_0^2\,dr_0+\int_I C_v\rho_0(\hat{\theta}-\log\hat{\theta})r_0^2\,dr_0$$

$$+R\int_I\rho_0\{\hat{\rho}^{-1}-\log\hat{\rho}^{-1}\}r_0^2\,dr_0 \quad (\geqq 0)$$

と定義する。このとき(30)～(33)よりアプリ評価として次の等式を得る。

$$(34)\quad S(t_0)+\frac{4}{3}\mu\int_I(1+\Omega)r^2\left(\hat{v}_{r_0}+\frac{2}{r}\hat{v}\right)^2 dr_0+\int_I\frac{1+\Omega}{\hat{\theta}}\hat{\Psi}r^2dr_0$$
$$+\kappa\int_I\left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{\hat{\theta}}\right)^2\frac{r^2}{1+\Omega}dr_0=S(0)=\int_I\frac{\rho_0 v_0^2}{2}r_0^2dr_0+$$
$$+\int_I[C_v\rho_0(\theta_0-\log\theta_0)+R\rho_0(\rho_0^{-1}-\log\rho_0^{-1})]r_0^2dr_0\ (>0),$$
$$(0\leqq t_0\leqq T)。$$

さて，(23)の中の$y(r_0,t_0;a)$を次のように分解する。

$$(35)\quad\begin{cases}y(r_0,t_0;a)=\bar{y}(r_0,t_0;a)+\bar{\bar{y}}(t_0;a),\\ \bar{\bar{y}}(t_0;a)\equiv\log\left\{\dfrac{\hat{\rho}(a,t_0)}{\rho_0(a)}\right\}+\dfrac{3}{4\mu}\displaystyle\int_0^{t_0}(R\hat{\rho}\hat{\theta})(a,\tau)d\tau,\\ \bar{y}(r_0,t_0;a)\equiv y(r_0,t_0;a)-\bar{\bar{y}}(t_0;a).\end{cases}$$

$|\bar{y}|$については上に得られた$S(t_0)$に関する評価を使えば直ちに評価

$$(36)\quad\begin{cases}|\bar{y}(r_0,t_0;a)|\leqq C_1(T)\ (C_1(T)はaには依存しない;\\ C_1(T)\nearrow\ (T\nearrow)),\quad(0\leqq t_0\leqq T)\end{cases}$$

を得る。また，今得られた$\bar{y}$に関する評価を利用して(28)を不等式の形に持って行きその両辺をr_0について積分する。その際$\int_I\hat{\theta}(r_0,\tau)r_0^2dr_0$を$S(\tau)$を用いて上から評価すると結局において$e^{\bar{\bar{y}}(t_0;a)}$に関する次の形の積分不等式が得られる。

$$(37)\quad\begin{cases}e^{\bar{\bar{y}}(t_0;a)}\leqq C(T)+C'(T)\displaystyle\int_0^{t_0}\bar{\bar{y}}(t_0';a)dt_0',\\ (0\leqq t_0\leqq T)。\end{cases}$$

これより

$$(38)\quad\Big\{e^{\bar{\bar{y}}(t_0;a)}\leqq C_2(T)\ (C_2(T)はaに依存しない;$$

$\left\{ C_2(T) \nearrow \ (T \nearrow) \right)$, $(0 \leqq t_0 \leqq T)$

を得る。$y = \bar{y} + \bar{\bar{y}} \leqq |\bar{y}| + \bar{\bar{y}}$ であるから (36) と (38) により e^y に関する上からの評価が得られる。

(38) $\quad e^{y(r_0, t_0; a)} \leqq C_2(T) e^{C_1(T)}$, $(0 \leqq t_0 \leqq T)$。

これより $\hat{\rho}(r_0, t_0)$ に関して (27) により

(39) $\quad \hat{\rho}(r_0, t_0) \leqq \bar{\bar{\rho}}_0 C_2(T) e^{C_1(T)}$, $(0 \leqq t_0 \leqq T)$ $(\bar{\bar{\rho}}_0 \equiv |\rho_0|_I^{(0)})$

なる評価を得る。次に $\hat{\rho}$ の下からの評価に移る。それには $(\hat{\rho})^{-1}$ を上から評価できればよい。(27) と (35)〜(38) によれば先ず次の関係を得る。

(40)
$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}(r_0, t_0)^{-1} &= \rho_0(r_0)^{-1} e^{-y(r_0, t_0; a)} \Big[1 + \int_0^{t_0} k \rho_0(r_0) e^{y(r_0, \tau; a)} \times \\
&\qquad \times \hat{\theta}(r_0, \tau) d\tau \Big] \\
&\leqq (\bar{\rho}_0)^{-1} e^{|\bar{y}(r_0, t_0; a)| - \bar{\bar{y}}(t_0; a)} \Big[1 + \int_0^{t_0} k \bar{\bar{\rho}}_0 C_2(T) e^{C_1(T)} \times \\
&\qquad \times |\hat{\theta}(\cdot, \tau)|_I^{(0)} d\tau \Big]_{B'} \\
&\leqq \frac{1}{\bar{\rho}_0} e^{C_1(T)} \cdot \frac{\rho_0(a)}{\hat{\rho}(a, t_0)} \Big[1 + k \bar{\bar{\rho}}_0 \int_0^{t_0} C_2(T) e^{C_1(T)} |\hat{\theta}(\cdot, \tau)|_I^{(0)} d\tau \Big]_{B'} \\
&\qquad \left(-\bar{\bar{y}}(t_0; a) \leqq -\log\left\{ \frac{\hat{\rho}(a, t_0)}{\rho_0(a)} \right\} \text{に注意} \right) \\
&\leqq \frac{l_2^2}{l_1^2 \bar{\rho}_0} e^{C_1(T)} \cdot r_{r_0}(a, t_0) \Big[\;\; " \qquad " \;\; \Big]_{B'}, \quad (0 \leqq t_0 \leqq T), \\
&\qquad (1 + \Omega(a, t_0) = r_{r_0}(a, t_0) \text{ に注意})。
\end{aligned}
$$

今，任意の $t_0 \in [0, T]$ に対して

(41) $\quad \left\{ \bar{\theta}(t_0) \equiv \dfrac{1}{l_0} \displaystyle\int_I \hat{\theta}(r_0, t_0) \, dr_0 , \quad (l_0 \equiv l_2 - l_1), \right.$

$$\left\{ E_{t_0} \equiv \{ r_0 : \hat\theta(r_0, t_0) = \bar\theta(t_0) \} \ (\neq \phi) \right.$$

と定義する。また $\bar r_0(t_0)$ で E_{t_0} の任意の要素を表わすことにする。この時，次の等式に注意する。

(42)
$$\int_{\bar\theta(t_0)}^{\hat\theta(r_0,t_0)} s^{-1}(s-\log s)^{+\frac{1}{2}}\,ds$$
$$= \int_{\bar r_0(t_0)}^{r_0} d\xi \frac{\partial}{\partial\xi} \int_{\bar\theta(t_0)}^{\hat\theta(\xi,t_0)} s^{-1}(s-\log s)^{\frac{1}{2}}\,ds$$
$$= \int_{\bar r_0(t_0)}^{r_0} \frac{1}{\hat\theta(\xi,t_0)} (\hat\theta - \log\hat\theta)^{\frac{1}{2}} \hat\theta_\xi(\xi,t_0)\,d\xi \ 。$$

また，次の関係式にも注意する。

(43)
$$\hat\theta(r_0,t_0)^{\frac{1}{2}} - \bar\theta(t_0)^{\frac{1}{2}} \leqq |\bar\theta(t_0)^{\frac{1}{2}} - \hat\theta(r_0,t_0)^{\frac{1}{2}}|$$
$$= \int_{\bar\theta(t_0)\wedge\hat\theta(r_0,t_0)}^{\bar\theta(t_0)\vee\hat\theta(r_0,t_0)} \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}}\,ds$$
$$\leqq \left| \int_{\bar\theta(t_0)}^{\hat\theta(r_0,t_0)} s^{-1}(s-\log s)^{\frac{1}{2}}\,ds \right|$$

($s^{-1}(s-\log s)^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}}$ ($s>0$) に注意)

$$\leqq \int_I |\hat\theta(r_0,t_0) - \log\hat\theta|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\hat\theta_{r_0}}{\hat\theta} \right| dr_0 \quad ((42)による)$$
$$\leqq \left[\int_I (\hat\theta - \log\hat\theta)\,dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_I \left(\frac{\hat\theta_{r_0}}{\hat\theta}\right)^2 dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} 。$$

以上より $\hat\theta(r_0,t_0)^{\frac{1}{2}}$ に関して以下の不等式を得る。

(44) $\hat\theta(r_0,t_0)^{\frac{1}{2}} \leqq \bar\theta(t_0)^{\frac{1}{2}} +$

$$+ \left[\int_I (\hat\theta - \log\hat\theta)\, dr_0\right]^{\frac12} \times \left[\int_I \left(\frac{\hat\theta_{r_0}}{\hat\theta}\right)^2 dr_0\right]^{\frac12}$$

$$\leqq \bar\theta(t_0)^{\frac12} + l_1^{-2}\left[\int_I (\hat\theta - \log\hat\theta)\, r_0^2\, dr_0\right]^{\frac12} \times$$

$$\times \left[\int_I \left(\frac{\hat\theta_{r_0}}{\hat\theta}\right)^2 \frac{r^2}{1+\Omega}\, dr_0\right]^{\frac12} \times \left[\left|(1+\Omega)(\cdot, t_0)\right|_I^{(0)}\right]^{\frac12}。$$

ここで $1+\Omega(r_0, t_0) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1}{\rho}$ に注目して (40) を使えば

$$(45) \quad \left|(1+\Omega)(\cdot, t_0)\right|_I^{(0)} \leqq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^4 \bar\rho_0^{-1} e^{C_1(T)}\, r_{r_0}(a, t_0) \times$$

$$\times \left[1 + k\bar{\bar\rho}_0 C_2(T) e^{C_1(T)} \int_0^{t_0} |\hat\theta(\cdot, \tau)|_I^{(0)} d\tau\right],$$

$$(0 \leqq t_0 \leqq T)$$

となることが分る。a は $[l_1, l_2]$ の中で任意であるので特に

$$(46) \quad \frac{1}{l_0}\int_I r_{r_0}(r_0, t_0)\, dr_0 = \frac{1}{l_0}\left[r(r_0, t_0)\right]_{r_0 = l_1}^{l_2} = \frac{l_2 - l_1}{l_0} = \frac{l_0}{l_0} = 1$$

$$= r_{r_0}(a, t_0) \qquad (0 \leqq t_0 \leqq T)$$

となるものを取る。それを $a(t_0)$ で表わす。(45) で各々の t_0 ごとに $a(t_0)$ を選べるので結局 (44) と (45) を組合せて (34) 式に注意すれば $\hat\theta(r_0, t_0)$ に関する上からの評価が得られる。

$$(47) \quad \hat\theta(r_0, t_0) \leqq C_3(T) \ (\nearrow (T\nearrow)), \ (0 \leqq t_0 \leqq T)。$$

この結果と今の論法を用いれば (40) より $(\hat\rho)^{-1}$ に関する評価が導びかれる。

$$(48) \quad \hat\rho(r_0, t_0)^{-1} \leqq C_3'(T) \ (\nearrow (T\nearrow)), \ (0 \leqq t_0 \leqq T)。$$

これらの結果に基づいて $\|\hat{v}, \hat{\theta}\|_{(I_T)}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}$, $\|\hat{\rho}\|_{(I_T)}^{1+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}$, $|\hat{\rho}^{-1}|_{(I_T)}^{(0)}$, $|\hat{\theta}^{-1}|_{I_T}^{(0)}$ に関する上からのアプリオリ評価が得られることになる。あとはこれらを用いて $(v, \theta, \rho) \in \mathfrak{H}^{\alpha}(\bar{D}_T)$ に関する評価を出せばよい。例えば次のようにして行く。

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\theta(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\theta}(|x|,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\theta}(r_0(|x|,t),t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_0}\hat{\theta}(r_0(|x|,t),t)\frac{\partial r_0}{\partial |x|}\frac{\partial |x|}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_0}\hat{\theta}(r_0(|x|,t),t)\left(1+\Omega(r_0(|x|,t),t_0=t)\right)^{-1}\frac{x_i}{|x|} \text{。}$$

最後に定理として次を得る。

定理2。任意の $T \in (0, \infty)$ に対して $\mathfrak{H}^{\alpha}(\bar{D}_T)$ に属する (1)-(11)-(11)$'$ の時間的大局解 (v, θ, ρ) が唯一つ存在する。しかも $\theta, \rho > 0$。

参考文献

[1] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, (1964), Prentice Hall.

[2] Itaya, N., On the Cauchy problem for the system of fundamental equations describing the movement of compressible viscous fluid, Kôdai Math. Sem. Rep., Vol. 23,

No. 1 (1971), 60-120. [Corrigenda and addenda, Journ. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, No. 1 (1976), 238-239.]

[3] Itaya, N., Some results on the piston problem related with fluid mechanics, Journ. Math. Kyoto Univ., Vol. 23, No. 4 (1983), 631-641.

[4] Itaya, N., 圧縮性粘性流体のピストン運動の大局問題について (I), 神戸商科「人文論集」, 第19巻, 第3・4号 (1984), 126-136.

[5] Itaya, N., 圧縮性NS方程式のある球対称な時間的大局解について, ibid., 第21巻, 第1・2号 (1985), 1-10.

[6] Кажихов, А. В., и Шелухин, В. В., Однозначная разрешимость «в целом» по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа, Прикл. Мат. Мех., Том 41 (1977), 282-291.

[7] Кажихов, А. В., О задаче Коши для уравнений вязкого газа, Сиб. Мат. Жур., Том 23, No. 1 (1982), 37-61.

[8] Ладыженская, О. А., и др., Линейные и квази-линейные уравнения параболического типа, (1967), Наука.

[9] Tani, A., On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol. 13 (1977), 193-253.